

# Разностный многочлен

8 июля

**Опр.** Многочлен называется целозначным, если он принимает целые значения при всех целых значениях аргумента.

**Опр.** Разностным многочленом для многочлена  $P(x)$  называется многочлен

$$\Delta P(x) = P(x+1) - P(x).$$

**I.** Приведите пример целозначного многочлена, старший коэффициент которого равен  $1/n$  для заданного натурального  $n$ .

**II.** Верно ли, что степень многочлена  $\Delta P(x)$  на один меньше, чем степень  $P(x)$ ?

**1.** Верно ли, что многочлен степени  $n$  является целозначным в том и только том случае, когда он принимает целые значения в точках **(а)** от 1 до  $n$ ; **(б)** от 0 до  $n$ ?

**2.** Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  найдётся единственный, с точностью до прибавления константы, многочлен  $Q(x)$ , такой что  $P(x) = \Delta Q(x)$ .

**3.** Для заданного  $n$  найдите такой многочлен  $P(x)$  степени  $n$ , что  $n \cdot P(x) = x \cdot \Delta P(x)$ .

**Опр.** Рассмотрим многочлены  $C_x^k = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). При  $x = n > k$ ,  $n \in \mathbb{N}$  многочлен  $C_x^k$  равен биномиальному коэффициенту с тем же обозначением.

**III.** Какие значения принимает  $C_x^k$  при остальных целых значениях переменной?

**4.** Чему равен разностный многочлен  $\Delta P(x)$  для  $P(x) = C_x^k$ ?

**5. (а)** Докажите, что любой многочлен  $P(x) \neq 0$  единственным образом представляется в виде  $P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_0$ , где  $a_n \neq 0$ .

**(б)** Какие коэффициенты будут у многочлена  $\Delta P(x)$ , если тоже представить его в таком виде?

**6.** Докажите, что существует многочлен  $P(x)$ , такой что  $P(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$  при всех натуральных  $n$ . Какая у него степень и старший коэффициент?

**7.** Докажите, что в разложении  $P(x) = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_0$  все коэффициенты  $a_i$  целые тогда и только тогда, когда  $P(x)$  — целозначный.

**Без доказательства.** Коэффициенты в разложении

$$x^n = a_n C_x^n + a_{n-1} C_x^{n-1} + \dots + a_0$$

вычисляются по следующему правилу:  $\frac{a_k}{k!}$  — это число способов разбить  $n$  элементов на  $k$  непустых подмножеств. В частности,  $a_n = n!$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 0$ .